A MATEMATICIDADE DA MATEMÁTICA SURPREENDIDA EM SUA PRÓPRIA CASA, NUA, NA PASSAGEM DOS SEMIGRUPOS AOS MONÓIDES

LUIZ SERGIO COELHO DE SAMPAIO

Rio, outubro de 1995

RECONHECIMENTO

Aos amigos Aluísio Pereira de Menezes e Márcio Gonçalves que ao proporem o tema de nossas tertúlias semanais acabaram tornando-se não só a causa propiciatória , mas também a causa final da elaboração do presente texto.

Ao amigo Pelosi que, sabedor de nossas intenções, proporcionou-nos um valioso apoio bibliográfico cuidadosamente pré-selecionado.

Ao amigo Francisco Rosa (Xiko Metralha) sempre presente com seu capricho e sua arte, sem falar na sua inexcedível velocidade.

À minha esposa Lailce, que pelos seus múltiplos afazeres, não teve tempo de ler o manuscrito e, muito menos, para datilografá-lo, mas ainda assim encontrou uma meia hora para ouvir atenta e pacientemente uma exposição resumida do mesmo chegando até a advertir-nos quanto à universalidade da tese que defendíamos, qual seja, a de que a matematicidade da matemática tinha por essência a simetrização do nulo. Exemplificou: – Não foram poucas as vezes em que ouvi meu pai afirmar, a propósito da questão do rigor na educação das filhas, que minha mãe não passava de um zero à esquerda. Jamais o vi referir-se, do mesmo modo à direita, e isso, com certeza, na sua matemática, fazia diferença.

ÍNDICE

1. A estranheza seguida da suspeita

2. Em busca do tempo (de todos nós) perdido

3. Episódios bergmanianos – jogando com a lógica da morte

   3.1 Olho por olho, para surpreender o conjuntista

   3.2 Crer para ver, no enfrentamento do categorista

   3.3 Ou Jano ou Gêmeos

4. Morte e Ressurreição

Se o nada deve ser questionado – o nada mesmo – então deverá ser primeiramente dado. **Devemos poder encontrá-lo.***

Heidegger. *Que é metafísica*

Todas as coisas escorregaram para um mesmo nível, para uma superfície que, semelhante a um espelho oxidado, já não espelha, nada reflete. A dimensão dominante torna-se a da **extensão** e do **número.***

Heidegger. *Introdução à metafísica*

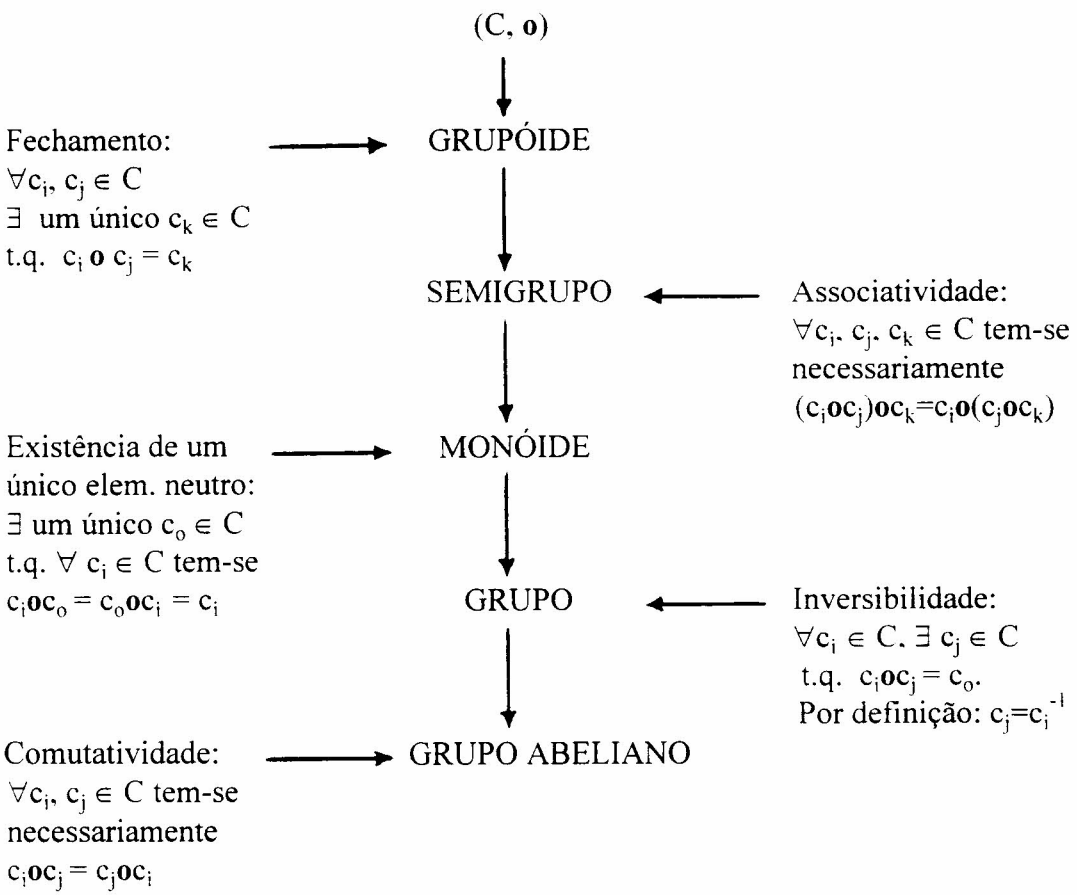
C'est pourquoi la **symétrie** y joue un grand rôle: elles ne décrivent qu'un monde figé dans une sorte d'éternité, où **tout est déjà arrivé.***

G. Lochak. *La géométrisation de la physique.*

* Grifos do autor.

1. A estranheza seguida da suspeita

Já é hábito entre os matemáticos apresentarem a noção formal de **grupo** de um modo construtivo. Partem de um par ordenado (C, o) onde C é um conjunto e o é uma operação – implicitamente unívoca – atuando sobre os elementos de C. A partir daí, introduzem, um a um, os axiomas que caracterizam o grupo, produzindo assim uma hierarquia de estruturas algébricas no sentido do mais para o menos geral, do menos para o mais "denso" ou complexo. A ordem de introdução dos axiomas não seria em princípio única, mas a que é geralmente adotada, acreditamos, tem o suporte de uma certa intuição já matematizante no sentido da neutralização da contextualidade originária das significações. A imposição do **fechamento**, a nosso ver, é "horizontalmente" descontextualizadora, tanto quanto a **associatividade** o é "verticalmente". Mas isto são só pressuposições: a verdade é que o consenso dos matemáticos acabou por consagrar a seguinte ordem de entrada em cena dos axiomas: **fechamento**, **associatividade**, **existência de um elemento neutro,** e **inversibilidade**. Esta lista é muitas vezes ampliada para incluir a **comutatividade**, o que nos leva para além da simples noção de grupo, especificamente, aos grupos abelianos. Teríamos, assim, o seguinte esquema hierárquico:



A elegância do esquema construtivo é evidente, porém, gostaríamos de chamar a atenção para algo que se nos afigura como sumamente estranho: qual a razão pela qual, na definição de monóide, é imposto que o elemento neutro c_o, o seja, concomitantemente, **à direita** e **à esquerda**, isto é, que c_o seja tal que $c_i \mathbf{o} c_o = c_i$ e $c_o \mathbf{o} c_i = c_i$ para qualquer c_i pertencente a C. Assim é geralmente feito, e citaríamos apenas, como um dos mais conspícuos exemplos, o da *Algebra* de MacLane e Birkhoff (8).

Para começar gostaríamos de lembrar que a neutralidade, identidade ou ação nula apenas de um lado – esquerdo ou direito – não dissolve a característica reflexiva ou idempotente de c_o: tivesse o axioma estabelecido apenas $c_i \mathbf{o} c_o = c_i$ ou, alternativamente, $c_o \mathbf{o} c_i = c_i$, ter-se-ia, substituindo-se c_i por c_o, em ambos casos $c_o \mathbf{o} c_o = c_o$. Este fato, aliás, tem um sentido filosófico profundo na medida em que viermos a atribuir uma conotação transcendental ou de "consciência" ao elemento neutro ou identitário, pois, constrangidos pelo formalismo matemático, seremos levados a aceitar que antes de que c_o possa assumir a conotação de transcendência pura, identidade própria ou auto-consciência, ele necessariamente terá que assumir aquela de consciência intencional ou operatória, ou ainda, como diriam Husserl e seus seguidores, de **consciência de.**

Há algo ainda de mais importante: a simetrização (à direita e à esquerda) do elemento neutro, nulo ou identitário no nível do monóide não é absolutamente redundante, vale dizer, não poderia resultar de um teorema, bem ao contrário do que ocorre ao nível do grupo. Deveras, para este último, onde foi imposta a inversibilidade geral, podemos provar, com a ajuda da propriedade da associatividade, a simetria do elemento neutro, qualquer que tenha sido a opção axiomática assumida, à direita ou à esquerda. Para fazê-lo, partimos, autorizados pela associatividade, da seguinte igualdade:

$$(c_i \mathbf{o} c_j) \mathbf{o} c_i = c_i \mathbf{o} (c_j \mathbf{o} c_i);$$

lançando mão do axioma da inversibilidade podemos substituir o genérico c_j pelo particular c_i^{-1}, assegurados de que este sempre existe, e teremos então:

$$(c_i \mathbf{o} c_i^{-1}) \mathbf{o} c_i = c_i \mathbf{o} (c_i^{-1} \mathbf{o} c_i);$$

como, ainda pelo axioma da inversibilidade, $c_i \mathbf{o} c_i^{-1} = c_i^{-1} \mathbf{o} c_i = c_o$ chegamos finalmente, por substituição, à igualdade:

$$c_o \mathbf{o} c_j = c_j \mathbf{o} c_o \quad \text{c.q.d..}$$

Por que os matemáticos, profissionais da elegância e da economia conceitual, teriam introduzido num nível inferior (o do monóide) um axioma que num nível imediatamente superior (o do grupo) pode ser obtido como teorema de fácil demonstração?! Em outras palavras, qual a motivação oculta que os levou a

introduzir o elemento neutro simétrico – à direita e à esquerda – já ao nível dos monóides?!

Ainda que não saibamos precisar a extensão ou as conseqüências do fato gerador de nossa estranheza, sentimo-nos plenamente justificados em suspeitar de que **algo de sério foi escamoteado à nossa atenção precisamente na passagem do semigrupo ao monóide**, e cujo traço sintomático, nos foi dado identificar: a introdução, sem mediação, do elemento neutro, injustificadamente já simetrizado, à direita e à esquerda.

Para aprofundarmos a busca de uma resposta teríamos, em princípio, dois caminhos a tomar: o primeiro, seria o de reconceituar o monóide impondo-lhe a existência de elemento neutro tão apenas de um lado – tanto faria, à direita ou à esquerda – e depois focalizar nossa atenção na passagem destes monóides re-conceituados aos grupos; o segundo, seria o de introduzir uma nova instância estrutural algébrica entre os semigrupo e os atuais monóides simetrizados e, a seguir, dirigir nossa atenção para a passagem desta nova instância a estes últimos. Embora o primeiro destes caminhos, a princípio, se nos afigurasse como o mais elegante e econômico, acabamos decidindo-nos pelo segundo em razão de que assim estaríamos bulindo o menos possível na tradição imperante e, conseqüentemente, suscitando menores resistências às nossas talvez importunas considerações.

Vamos, pois, introduzir uma instância algébrica intermediária entre semigrupo e monóide que levará a denominação de **semimonóide**, aliás, com inteira propriedade, haja visto que sua característica específica será a de possuir um elemento semi-neutro, isto é, só atuante como tal de um dos lados, à direita ou à esquerda. O **semimonóide** seria assim um par ordenado (C, **o**) constituindo-se num semigrupo – vale dizer, fechado e associativo – para o qual exige-se, suplementarmente, que contenha um elemento c_o neutro à direita (como poderíamos tê-lo escolhido à esquerda), isto é, tal que para todo c_i pertencente a C tenha-se, necessariamente $c_i \mathbf{o} c_o = c_i$.

Fazemos questão de frisar que no semimonóide assim definido o elemento neutro preserva duas características essenciais (do ponto de vista filosófico): a primeira, de se manter reflexivo ou indepotente ($c_o \mathbf{o} c_o = c_o$); a segunda, que isso acontece por simples conseqüência teoremática de sua ação neutra ou nulificadora – ainda que tão somente à direita – sobre a totalidade dos elementos de C. Conotativamente, c_o conserva-se reflexivo ou consciente na medida em que, antes, constitui-se como consciência de.

O esquema hierárquico construtivo das instâncias algébricas anteriormente apresentado, com a modificação aqui proposta, passaria a ser então:

GRUPÓIDE → SEMIGRUPO → SEMIMONÓIDE → MONÓIDE → GRUPO → GRUPO ABELIANO.

Bem, além de um ganho em *plus*-elegância, que de mais significativo para a compreensão das estruturas formais poderíamos ainda daí sacar? É o que pretendemos elucidar a seguir.

2. Em busca do tempo (de todos nós) perdido

Preliminarmente, vamos trazer à cena a noção de **livre** já aplicada a monóides e outros entes matemáticos. Trata-se de substituir a noção de algo direta ou extensivamente **dado** por algo mais restrito, porém, munido de regras operatórias capazes de gerarem de forma unívoca aquele mesmo **dado**. É a substituição do **dado extensivo** pelo **dado intensivo**, de alta relevância nos casos em que aquilo que temos em mente seja de natureza ilimitada ou infinita. Para ilustrar, a formalização das linguagens, que têm palavras, frases, parágrafos e textos de dimensões não previamente estabelecidas, requer justamente a noção de **livre**, no caso, aquela de monóide livre.

Vamos estender agora a noção de livre ao semimonóide que ficaria assim caracterizado: é o par (C, **o**) em que os elementos do conjunto C são as cadeias (*strings*) gerados a partir de um conjunto G = $\{g_o, g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, dito gerador de C, através da concatenação de seus elementos pela própria operação **o**. Em suma, os elementos de C são todas as combinações de elementos de G tomados um a um, dois a dois, e assim sucessivamente.

Para que de fato (C, **o**) venha constituir-se num semimonóide é imprescindível que G possua um único elemento g_o , neutro também à direita em relação aos demais elementos de G; caso contrário, como poderíamos garantir a C um elemento neutro? Naturalmente, ter-se-á $c_o = g_o$. Fica também mais ou menos óbvio que o gerador G deve conter pelo menos dois elementos, doutra forma, toda cadeia formada reduzir-se-ia a g_o mesmo: $g_o \mathbf{o} g_o \mathbf{o} \ldots \mathbf{o} g_o = g_o$. Isto faria com que C se identificasse com o próprio G e, conseqüentemente, que a noção de semimonóide livre perdesse toda a sua significação distintiva em relação ao semimonóide inqualificado. Em síntese, G seria um gerador que não gera senão ele próprio.

A mesma estrutura nocional aplica-se à definição de monóide livre exigindo-se apenas, suplementarmente, que g_o – pertencente a G e ainda identificado com c_o – se comporte como elemento neutro tanto à direita quanto à esquerda em relação a todos os demais elementos de G.

Cumpre observar que G, tanto para os semimonóides como para os monóides livres, não se constitui, junto com **o**, em nenhuma das estruturas algébricas até aqui consideradas, simplesmente porque, se assim fosse, estaríamos obrigando a que G fosse fechado em relação a esta mesma operação. Na presente situação, deixar que G

G se feche é o mesmo que permitir a degenerecência de C, ou seja, que C se identifique com G mesmo, fazendo, assim, com que a noção de **livre** se esvaia.

Para que possamos melhor e mais profundamente avaliar o que ocorre na passagem do semimonóide ao monóide não precisamos aqui tomá-los em sua plena generalidade; basta que consideremos e comparemos o semimonóide e o monóide livres gerados a partir de um conjunto gerador constituído de apenas dois elementos. Isto porque, como já dito, a noção de livre dissolve-se para G contendo um só elemento, e mais ainda, porque o semimonóide e o monóide realmente livres, gerados por apenas dois elementos, são formalmente únicos. Aliás, o tipo de renúncia aqui proposta não é assim tão original; já de algum tempo, assim agem os minimalistas no terreno das artes!

Pelas características minimalistas destas entidades, receberão elas a denominação de **fundamentais**: semimonóide livre fundamental e monóide livre fundamental.

Semimonóide livre fundamental

É o par (C, /) gerado a partir de G = {I,D} por meio da própria operação / , tomando-se I como o elemento neutro à direita, tanto de G, quanto de C.

A operação / é simplesmente a operação genérica **o** rebatizada. Os elementos de C seriam em princípio:

C = {I, D, I/I, I/D, D/I, D/D, I/I/I, I/I/D, I/D/I, D/I/I, I/D/D, D/I/D, D/D/I, D/D/D, I/I/I/I, I/I/I/D, ...}

Estabelecendo-se, por definição, $\underbrace{D/D/D/.../D}_{n} = D/^{n}$ e levando-se em consideração a neutralidade axiomática à direita de I, teríamos:

C = {I, D, I, I/D, D, $D/^2$, I, I/D, I/D, D, I/D, $D/^2$, $D/^2$, $D/^2$, $D/^3$, I, I/D, ...}

Suprimindo-se as repetições, chegaríamos, por fim, a:

C = {I, D, I/D, $D/^2$, I/D, $D/^2$, $D/^3$, ...}

Monóide livre fundamental

É o par (C, +) gerado a partir de G = {I,D} por meio da própria operação + (que aqui rebatiza **o**) tomando-se I como o elemento neutro à direita e à esquerda em G e, conseqüentemente, também em C.

Os elementos de C, em princípio, seriam:

C = {I, D, I+I, I+D, D+I, D+D, I+I+I, I+I+D, I+D+I, D+I+I, I+D+D, D+I+D, D+D+I, D+D+D, I+I+I+I, I+I+I+D,...}

Tendo-se em conta a neutralidade de I à direita e à esquerda, teríamos:

C = {I, D, I, D, D, D+D, I, D, D, D, D+D, D+D, D+D, D+D+D, I, D, ...}

que, suprimidas as repetições, reduzir-se-ia finalmente a:

C = {I, D, D+D, D+D+D, ...}

Fazemos aqui um breve parêntese para observar que a noção de **livre** perde seu sentido quando estendida aos grupos na medida em que teríamos que exigir a prévia inversibilidade geral dos elementos de seu gerador, o que provocaria o seu fechamento, e por fim, que G se confundisse com C. Para ilustrar isto vejamos o caso do grupo "gerado" pelo mesmo G = {I, D} e a operação **o**. Para que "gerássemos" um grupo teríamos que ter necessariamente $D = D^{-1}$ e conseqüentemente **D**o**D** = I o que faria C reduzir-se ao próprio G. A noção de **gerador de grupo** é relevante, porém, num sentido bem diferente, que não permite a sua assimilação à noção de gerador **livre** aqui considerada. Por exemplo, no grupo de dois elementos (G, **o**) onde G = {I,D}, D constitui-se no gerador do grupo, no preciso sentido de que ele sozinho é capaz de gerar todos os elementos do grupo, inclusive a si mesmo: D = D**o**D**o**D e I = D**o**D.

Bem observando cada uma das estruturas formais geradas por G={I,D} e confrontando-as, somos levados a uma série de conclusões, em quantidade e profundidade, até de certo modo surpreendentes para o próprio autor. Eis, a nosso juízo, as mais relevantes:

a) O semimonóide livre fundamental é perfeitamente isomórfico às lógicas, melhor dito, aos seus significantes formais tal como por nós há muito estabelecidos em *Noções elementares de lógica* (9) e no artigo por aparecer *Lacan et les logiques* (10). Isto é o mesmo que dizer que a seqüência das lógicas – I (transcendental ou da identidade), D (da diferença, incluindo suas versões paracompleta e paraconsistente), I/D (dialética, seja platônica, seja hegeliana), $D/^2$ (clássica ou da dupla diferença), $I/D/^2$ (qüinqüitária ou hiper-dialética), $D/^3$ etc. – constituem, formalmente, um semimonóide livre gerado pelo conjunto das lógicas fundamentais I e D.

b) O monóide livre fundamental é perfeitamente isomórfico ao conjunto dos números naturais incluído aí o zero. Tomando-se por referência a axiomática de Peano, o número **zero** seria representado por I e a noção de **sucessor**, pela

expressão "+D", isto é, x+D devendo ser lido como o imediato sucessor de x. Numa interpretação mais simples e intuitiva, I e D representam, respectivamente, os números zero e um, a operação + tomando o seu sentido aritmético usual de soma.

c) A operação designada pelo sinal " / " no semimonóide apresenta, sem sombra de dúvida, um sentido conotativo manifestamente sintético ou dialético na medida em que ela permite ao elemento I atuar e re-atuar persistentemente em contraposição ao igualmente insistente poder diferenciador de D. Caso atribuamos a I a conotação de Nada heideggeriano, vemos que este, por sua própria "essência", é persistentemente nadificante – "O próprio nada nadifica" (5).

d) Em contraste, no monóide livre fundamental a operação + assume o papel de simples soma aritmética vis-à-vis o zero e o 1. Aqui o zero não mais indica o Nada, é apenas um nada exangue, particularizado, mais precisamente, um nada-número que não é verdadeiramente número, mas mero semblante.

Isto faz com que qualquer número, seqüência deles ou expressão que os contenha ou represente deixe de se contrapor ao Nada, horizonte ontológico inerente a todo ente e assim, subtraia-se a inesgotável problemática de sua origem. O zero ou nada-numérico é apenas a múmia matemática do Nada, uma cicatriz ou marca de sutura que elide a falta consubstancial a todo ente. Mesmo como cicatriz, não o é verdadeiramente, forçada que foi a espacializar-se – à direita e à esquerda. Em resumo, no monóide livre acha-se já completamente velada a decisiva problemática ôntico-ontológica.

e) A comparação dos papéis exercidos pelas operações / no semimonóide e + no monóide deixa transparecer que o esforço de descontextualização das significações que os matemáticos buscam obsessivamente impor em seu domínio, primeiro pelo fechamento e após pela associatividade, não consegue realizar-se ao nível do semimonóide. É a imposição do nulo simetrizado, à direita e à esquerda, que vai infligir o golpe fatal à contextualidade: os números inteiros já não reverberam à distância e a operação + fica destituída de todo vigor sintético, restringindo-se a um papel articulador meramente externo ou combinatório.

f) "Deus fez os inteiros, todo o resto é obra do homem" era no que acreditava Kronecker (1). Pelo que vimos, bem melhor seria atribuir-Lhe a criação das lógicas, cabendo ao homem a matemática por inteiro, a começar pelos próprios números naturais. E estes teriam sido criados pelo homem por força de uma castração ou quebra de um vigor sintético. Assim, mumificou-se o nulo ou a identidade propriamente lógica; congelou-se, por conseqüência, a dialeticidade e, tudo isto, com um só golpe – a simetrização, ou o que é o

mesmo, a espacialização do Nada. O corte Criador/criatura não seria de modo algum interno à matemática, mas situar-se-ia justo no limiar desta com a lógica.

Podem seus teólogos (afeitos apenas à lógica aristotélica, e nada às demais lógicas) e seus fiéis o serem: neuróticos obsessivos, como acreditava Freud; Deus mesmo, não é certo que também o seja.

g) É costume associar a aritmética (em particular a seqüência dos números) à temporalidade e a geometria e a álgebra à espacialidade. Assim, já o faziam os medievais, particularmente, em seu *quadrivium.* Entretanto, pelo que vimos, a seqüência dos números naturais, incluído o zero, já é algo espacializado, pois resulta ela precisamente da simetrização, à esquerda e à direita, do elemento nulo ou identitário. Na seqüência dos naturais tanto a temporalidade como a conseqüente dialeticidade já foram neutralizadas ou mumificadas; a historicidade é ali substituída pela pura **acumulação**. Entre os monóides, e exemplarmente entre os números naturais, não mais existe um "futuro criativo", mas, e tão apenas, um "futuro calculado", o que, entrementes, já não ocorre entre os semimonóides e, correlatamente, com as lógicas. No que tange às geometrias, a espacialização é, por essência, ainda mais radical, na medida em que elas são correlatas dos grupos de transformação. Não é um simples acaso que Felix Klein (6), com seu famoso Programa de Erlangen, tenha buscado a unificação das geometrias identificando o conhecimento de cada uma delas ao estudo das invariancias relativamente a determinados grupos de transformações. Em suma, o monóide constitui o primeiro passo, conquanto que decisivo, para a espacialização do mundo, que se consuma, num golpe de misericórdia, com o império das estruturas de grupo.

h) Num mundo completamente inversível, absoluta e exclusivamente extenso ou espacial, ou dito em termos matemáticos, num mundo governado por **grupos**, desaparecem todas as condições de historicidade, e o mais drástico, a possibilidade de emergência da consciência – mesmo que concebida como consciência intencional – e, conseqüentemente, do projeto e da liberdade. Considerações antrópicas: se existo, se estou inapelavelmente condenado à liberdade, é que o mundo é algo mais que simples *res extensa* geometrizada; vivo num mundo histórico onde, portanto, vigem as pré-condições lógicas para se pensar a criação e a escatologia.

i) A um universo lingüístico contendo pelo menos a aritmética elementar ou, posto com maior generalidade, a um universo lingüístico onde o **nada** se apresenta (ou simula sua presença) de modo simetrizado, algo necessariamente lhe faz exceção, isto é, escapa ao seu dizer: o nada não simetrizado. Concordamos que esta proposição pouco mais é do que um truísmo, porém decidimos expô-la aqui não só porque ainda muito se resiste

à sua verdade, como também, porque ela encontra um equivalente no universo **matêmico** lacaniano: para qualquer totalidade caracterizada por $\forall x\phi(x)$, existe obrigatoriamente algo que lhe escapa ou excede, vale dizer, $\exists x\bar{\phi}(x)$.

j) Ainda que inconscientemente, ainda que só culposamente, ainda que com ponderáveis atenuantes de ordem neurótica, o fato é que com a desconsideração da instância "algébrica" intermediária dos semimonóides – vale dizer, pela inclusão da noção de elemento nulo já simetrizado à direita e à esquerda quando da definição de monóide – os matemáticos escamotearam a essência da questão do fundamento, induziram a que acreditássemos numa ilusória auto-suficiência formal – por um outro viés, aliás, já denunciada pelos teoremas de Gödel –, enfim, subtraíram-nos um valioso apoio metafórico para que mais facilmente chegássemos ao desvelamento da crucial diferença ôntico-ontológica.

l) Como resumo: a matematicidade da matemática está numa ardilosa nadificação do Nada; sua essência é um nada simetrizado ou espacializado, à direita e à esquerda. Na matemática não mais impera Zeus, mas Jano.

Por tudo isto a que chegamos – e se empenharmo-nos, muito mais haverá – não cremos ter sido assim tão grande o barulho que fizemos com nossa estranheza seguida de suspeita introdutórias!

3. Episódios bergmanianos – jogando com a lógica da morte

Em tudo que precede, particularmente no item anterior, não nos estaríamos deixando arrastar por uma comovente circularidade? Como poderíamos afirmar que a matematicidade da matemática começa com o monóide, se é largamente aceito por seus mais destacados cultores – depois de Cantor e mais ainda com Bourbaki (3) – que todo o edifício matemático assenta sobre a **teoria dos conjuntos**, e que nós mesmos a pusemos, como todo mundo, no alicerce da construção da noção formal de monóide – monóide é um par ordenado (C, **o**) onde C é um conjunto ...?! Ainda que substituíssemos a noção de conjunto pela, por muitos aceita como mais primitiva, noção de **categoria**, a coisa não se complicaria ainda mais na medida em que os próprios monóides podem ser aí definidos como uma particular espécie?!

Aqui trocamos de lado, desvestímo-nos de diabo, e voltamos a brincar de sermos nós mesmos, primeiro, havendo-nos com os conjuntistas, e a seguir, mais perigosamente, com os categoristas.

3.1 Olho por olho, para surpreender o conjuntista

Vamos partir da tradicional axiomática de Zermelo-Fraenkel (4) e tornar evidente que vítimas de circularidade somos todos nós, quem sabe, inexoravelmente.

Seja C um conjunto; pelo **axioma do conjunto potência** (*power-set*) existe, necessariamente um conjunto designado P(C) contendo todos os subconjuntos de C, inclusive o próprio conjunto C, dito subconjunto impróprio de C. Ademais, com o concurso do **axioma-esquemático dos subconjuntos** garantimos que existe o conjunto vazio, designado ϕ, e que este está necessariamente contido em P(C). Com o **axioma da união** é introduzido o operador união ($\cup$) pertinente para todos os conjuntos, em particular, para os conjuntos (subconjuntos de C) pertencentes a P(C).

Isto estabelecido, podemos afirmar com certeza que o par (P(C), $\cup$) constitui um monóide:

P(C) é fechado, pois para todos p_i, p_j pertences a P(C) tem-se: $p_i \cup p_j = p_k$ com p_k petencente a P(C);

P(C) é associativo, pois para todos p_i,p_j e p_k pertencentes a P(C) tem-se necessariamente $(p_i \cup p_j) \cup p_k = p_i \cup (p_j \cup p_k)$

P(C) contém um único elemento neutro – o conjunto vazio ϕ – tal que, para todo p_i pertencente a P(C) tem-se $\phi \cup p_i = p_i \cup \phi = p_i$, isto é, ϕ é neutro tanto à direita, quanto à esquerda.

Ficamos, pois, autorizados a tirar duas importantes conclusões:

1ª) Existe uma irrefutável correlação entre as noções de monóide e conjunto, a saber: se C é um conjunto existe necessariamente a ele associado P(C) que é pelo menos um monóide; e ainda, se C é um conjunto, ele pertence necessariamente a pelo menos um monóide, qual seja, P(C). Para fortalecer o seu próprio juízo, ainda que intuitivo, sobre a correlação apontada, tente o leitor imaginar um conjunto que escape às determinações acima.

2ª) Caso venhamos, por meio de axiomas apropriados, a impor à noção de conjunto a condição de que P(C) exista e se constitua apenas num semimonóide; e mais, retirada dos axiomas suplementares a condição de provarem que ϕ seja simétrico em relação à operação de união – mesmo que sua nulidade de um dos lados esteja já axiomaticamente assegurada – garantimos que nem a noção de conjunto, nem sua teoria formalizada se sustentariam. Para restabelecê-las, outro remédio não haveria senão o de introduzir um axioma específico, que por si ou associado com os demais, assegurasse a nulidade de ϕ, tanto à esquerda

como à direita, relativamente a qualquer conjunto, quando submetidos a operação de união.

A circularidade de que nosso demônio estaria acusando-nos, estribado na fundamentalidade da noção de conjunto e de sua teoria formalizada, pelo demonstrado, de volta a ele também se aplicaria. A noção de conjunto, em seu cerne, subentende a noção de monóide, sendo o inverso igualmente verdadeiro.

Se é fato que não vencemos nosso jogo bergmaniano com a lógica da morte, pelo menos, cremos, conseguimos levá-lo para o empate.

3.2 Crer para ver, no enfrentamento do categorista

É por muitos aceito, hoje, que a teoria das categorias pode substituir, com maior flexibilidade, a teoria dos conjuntos como alicerce da matemática.

Se assim, não temos outra alternativa senão retomar nossa discussão acerca da matematicidade da matemática nesta nova arena – a da teoria das categorias.

A primeira vista nossa tarefa pareceria bem mais fácil do que aquela em que nos empenhamos no sub-item anterior dada a manifesta similitude dos axiomas que caracterizam categorias e monóides. Entretanto, como veremos a seguir, a lógica da morte tem muitos fôlegos – tantos quanto o liberalismo – e retorna, já escolada, para impedir que repitamos a estratégia de jogar para o empate. Agora, ou se vence, ou se perde.

Numa primeira aproximação, ainda dependente da noção de conjunto – embora já se saiba que ela pode disso se autonomizar – uma **categoria** seria uma trinca ordenada – (A, H, **o**) – em que A é um conjunto de objetos quaisquer, H um conjunto de morfismos definidos entre os objetos de A, inclusive de tipo endomórfico, e, por fim, uma operação **o** de composição dos morfismos de H, mas não necessariamente para todos. Os membros da trinca ordenada estariam obrigatoriamente sujeitos aos seguintes três axiomas (7):

1) Para um par de elementos de H designadas h_{ixy} (o i-gésimo morfismo com domínio em A_x e contradomínio em A_y) e h_{jyz} (o j-ésimo morfismo com domínio em A_y e contradomínio em A_z) onde A_x, A_y e A_z pertencem ao conjunto de objetos A, existe necessariamente o morfismo h_{kxz} designando o produto $h_{ixy}\mathbf{o}h_{jyz}$, com h_{kxz} pertencente a H.

   Dizemos que H é **parcialmente fechado** em relação à operação **o** porque nem todos os pares de elementos de H admitem uma articulação pela operação **o**; isto só acontece se o contradomínio do primeiro coincidir com

o domínio do segundo, o que equivale a dizer que a operação **o** está sujeita à regra de contração semelhante àquela definida para os tensores;

2) Para h_i, h_j e h_k pertencentes a H, com h_i articulável com h_j e este com h_k, tem-se necessariamente:

$$(h_i \mathbf{o} h_j) \mathbf{o} h_k = h_i \mathbf{o} (h_j \mathbf{o} h_k)$$

isto é, a operação **o** é **associativa** em H;

3) Para todo A_i pertencente a A existe um morfismo (no caso, um automorfismo) h_{oyy} pertencente a H tal que para qualquer h_{jxy} e h_{kyz} também pertencentes a H, se tem necessariamente:

$$h_{jxy} \mathbf{o} h_{oyy} = h_{jxy} \quad \text{e} \quad h_{oyy} \mathbf{o} h_{kyz} = h_{kyz},$$

vale dizer, H contém um sub-conjunto de **elementos neutros** ou identitários h_{oyy} correspondentes a cada um dos objetos A_y pertencentes a A.

A já aludida similitude entre categorias e monóides torna-se patente: ambos compartem três propriedades básicas da matemática – o fechamento, a associatividade e a existência de elemento nulo ou identitário. Entrementes, não nos é permitido simplesmente identificá-los porque, em que pese as similitudes, existem duas discrepâncias críticas. A primeira, é que o monóide é completamente fechado e a categoria só o é parcialmente, isto é, a tabela de multiplicação relativamente à operação **o** para a categoria admite posições vagas ou não definidas, o que já não ocorre na tabela de multiplicação do monóide; a segunda, esta bastante grave, é a existência de uma multiplicidade de elementos neutros na categoria, enquanto que entre os monóides ele é único.

Para tornar esta comparação ainda um pouco mais clara, vale a pena trazermos à cena a definição mesma de monóide como uma espécie de categoria. A definição é extremamente econômica . . . e sutil:

monóide é uma categoria com um único objeto. (11).

Veja-se: existindo somente um objeto na categoria, a multiplicidade de elementos nulos automaticamente desaparece; concomitantemente, a categoria torna-se completamente fechada dado que, na aludida condição, coincidem todos os domínios e contradomínios tornando assim todos os morfismos articuláveis entre si; vale dizer, deixam de existir posições vagas nas tabelas de multiplicação dos morfismos.

Pelo visto até aqui, não pode persistir qualquer dúvida quanto ao maior grau de generalidade das categorias em relação aos monóides, e, o que é muito mais importante, quanto ao **sentido** em que ela verdadeiramente se dá. E daí, por conseqüência, da impotência, no caso da categoria, da estratégia por nós usada quando da discussão da matematicidade da teoria dos conjuntos.

Embora conscientes da complexidade da questão da matematicidade quando referida à categoria, mantemos nossa crença de que a chave da questão está na natureza do elemento nulo e não na sua unicidade ou multiplicidade, e ainda menos na questão do fechamento parcial ou total. Assim, para aprofundarmo-nos na questão do sentido dos elementos nulos nas categorias, vamos uma vez mais apelar para a noção de **livre** e depois, de **livre fundamental**, tal como fizemos com monóides e semimonóides.

A noção de **livre** se estende à categoria de modo natural: **categoria livre** seria aquela cujos elementos de H derivam de um conjunto gerador G_H de morfismos por meio da própria operação de composição **o**. Chamaremos de **fundamentais** as categorias livres cujo gerador contenha apenas dois elementos, I e D, I convencionado ser o elemento neutro genérico.

Em princípio, temos apenas quatro opções: a) **DoD** existe, não se confundindo, entretanto, nem com I, nem com D; b) **DoD** = I; c) **DoD** = D; e, por fim, d) **DoD** é uma composição interdita ou não definida. Para facilitar a escritura, vamos daqui por diante trocar a operação **o** por um simples ponto.

As três primeiras opções – a, b, c – possuem tabelas de composição fechadas, isto é, sem posições vazias, logo referem-se a um único objeto, e por isso, constituem monóides. Senão vejamos:

a) D.D existe sendo ele diferente de I e de D.

A tabela de composição já comprometida seria, pois:

.	I	D	...
I	I		
D		D.D	
⋮			

Havendo um único elemento nulo, ter-se-ia complementarmente:

.	I	D	...
I	I	D	
D	D	D.D	
⋮			

Como D.D não é redutível nem a I nem a D, ele irá constituir-se num elemento novo de H, abrindo linha e coluna correspondentes:

.	I	D	D.D	...
I	I	D	D.D	
D	D	D.D	D.D.D	
D.D	D.D	D.D.D	D.D.D.D	
⋮				

Por convenção façamos $\underbrace{D.D \ldots D}_{n} = D^n$. Daqui por diante, duas alternativas a nós se abririam: a primeira é que exista, suplementarmente, uma relação $D^n = I$, o que transforma a categoria no grupo cíclico n; a segunda, é que não exista qualquer relação pesando sobre nenhuma das potências de D. Neste último caso, é fácil reconhecer nesta categoria livre fundamental o mesmo monóide livre representativo dos números naturais incluído o zero; I e D representariam, respectivamente os números zero e um, e a operação ponto a soma aritmética tradicional.

b) D.D = I

A tabela de composição, neste caso, já está completamente definida, vale dizer, que $H = G_H$. Seria ela:

.	I	D
I	I	D
D	D	I

Temos aí um caso particular da primeira alternativa surgida na opção anterior: trata-se simplesmente do grupo cíclico 2, expressão formal das operações de reflexão, inversão, complementaridade, etc.

c) D.D = D

Neste caso, também, a tabela de composição já está completamente definida, ou seja, $H = G_H$. Vejamos:

.	I	D
I	I	D
D	D	D

Reconhecemos aí o monóide da projeção; um bom exemplo seria o da projeção sobre um plano de um corpo no espaço.

Pode-se, pois, concluir que estas três primeiras opções de categorias livre não são verdadeiramente fundamentais; são sim formas degeneradas; as duas últimas, aliás, gravemente degeneradas, porque perdem mesmo sua essência de **livres**. Nas três, são perdidas as características essenciais da categoricidade: a multiplicidade de elementos nulos, o fechamento apenas parcial (tabelas de composição com posições vagas), e até os morfismos são reduzidos a sub-espécie dos endomorfismos. Tudo isso, veremos, que estará sendo preservado na próxima opção.

d) D.D é composição interdita ou não definida

A partir apenas dos morfismos geradores teremos como tabela de multiplicação ainda parcialmente definida, a seguinte:

.	I	D
I	I	
D		□

Ora, o fato de que D não se articula consigo mesmo diz-nos que ele se constitui num héteromorfismo mediando, assim, dois objetos distintos e daí, a exigir, axiomaticamente, a duplicação do nulo. Em síntese, a parte da tabela anterior contendo apenas I, é, na verdade, uma representação ainda compactada de algo maior. Convencionando-se que x e y designam, respectivamente, domínio e o contradomínio de D, teríamos:

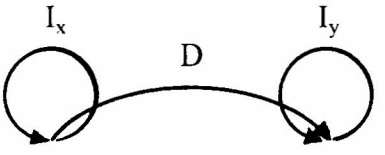
.	I
I	I

forma compactada de

.	I_x	I_y
I_x	I_x	□
I_y	□	I_y

A tabela final para a presente categoria, seria pois:

.	I_x	I_y	D
I_x	I_x	□	D
I_y	□	I_y	□
D	□	D	□



Fica bastante evidente que a opção d) é a única que guarda a "essência" da categoricidade matemática – o fechamento apenas parcial, a associatividade e a duplicidade de neutros. Ela, de certo modo, constitui-se como o morfismo em sua inteireza e essencialidade, tanto que poderíamos chamá-la mesmo **morfismo categorial**. Sua definição sumária poderia ser: a categoria irredutível. Qualquer categoria mais simples torna-se uma categoria degenerada. De fato, mais simples que ela só haveria a categoria de um só morfismo, que já não seria mais um morfismo em sua generalidade, mas um mero automorfismo I; sua tabela de composição resumir-se-ia a:

.	I
I	I

onde não há mais posições vazias nem a multiplicidade do nulo; enfim, a categoria que não o é, verdadeiramente. Como tal ela se comportaria como o zero vis-à-vis a seqüência dos números naturais submetidas à soma; ou como o conjunto vazio vis-à-vis qualquer conjunto submetido à operação de união. Em suma, ela é a zero-categoria, que de modo algum pode ser confundida com uma fantasmagórica categoria sem objetos e sem morfismo, que nada mais seria que um contrasenso.

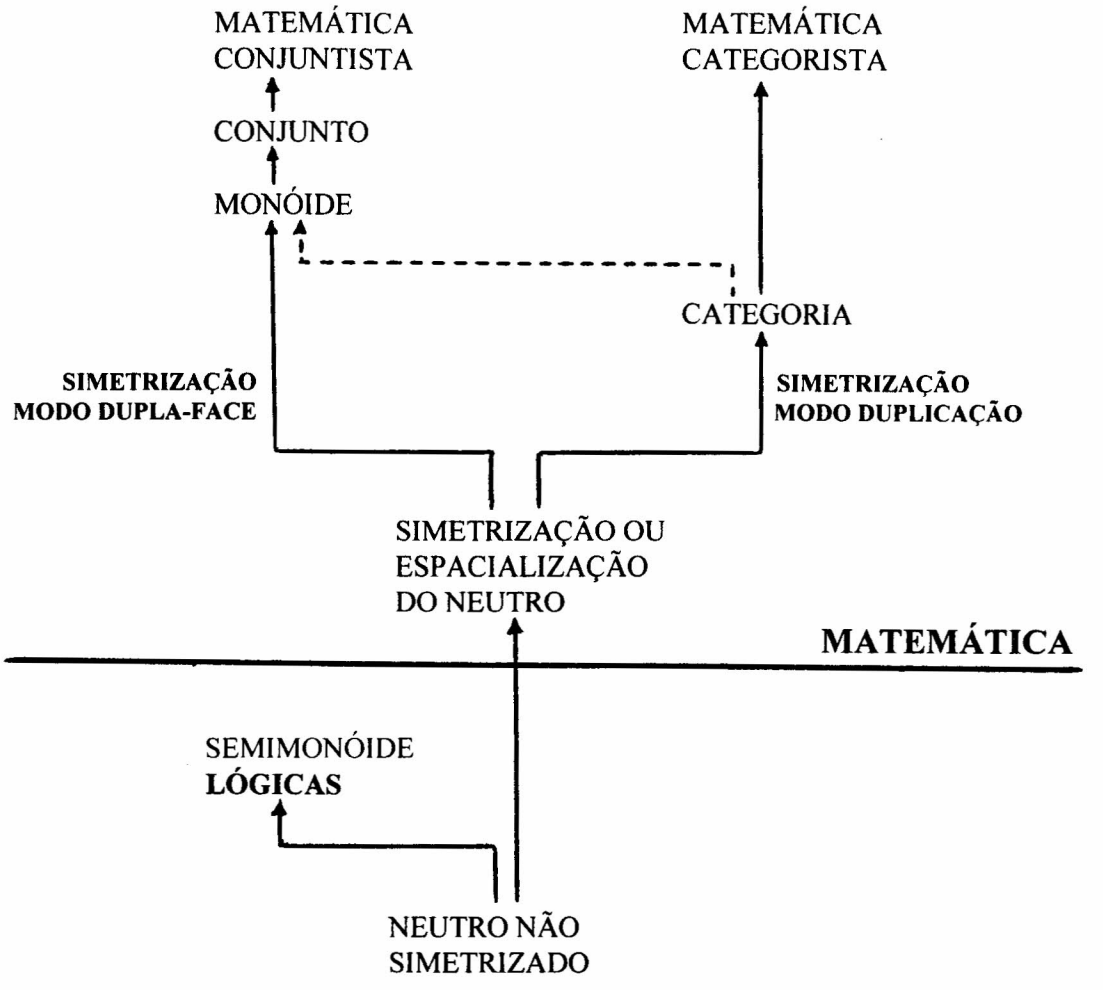
Bem, quanto à questão da simetrização ou espacialização do nulo na categoria, em que ficaríamos?

Um pouco de atenção nos fornece a resposta, agora, óbvia. A simetrização ou espacialização do nulo lá está, gritante, porém de um modo diferente daquele em que ela se realiza nos monóides e na teoria dos conjuntos, qual seja, a de um nulo de dupla-face, esquerda e direita. Na teoria das categorias ela se realiza, sim, mas pela duplicação do nulo, sempre e irrevogavelmente, um à esquerda e outro à direita, seja na categoria livre fundamental, seja na mais complexa das categorias. Alguém poderia pretender contestar-nos dando como contra exemplo – aliás, o único – a categoria de um só morfismo. Redarguiríamos dizendo que ela é uma categoria degenerada, uma zero-categoria, e ainda assim, não pôr que a simetria do nulo ali não exista, mas porque ela tão apenas regride a um modo primitivo.

Caberia indagar o porquê de dois modos de simetrização; e mais, em que essencialmente eles se distinguiriam, já que as matemáticas derivadas de um e outro – conjuntista e categorista – não são de mesmo nível, a última precedendo a primeira em sua fundamentalidade?! Diríamos que a simetrização por dupla-face é *a priori* e aquela pôr duplicação *a posteriori* da **diferença**; que a primeira suprime a liberdade e a temporalidade, enquanto que a segunda congela a dialeticidade; que a primeira sobrepõe o espaço ao tempo, a segunda, o sistema/causalidade à história; que a primeira é preventiva a segunda repressiva. Ambas, entretanto, são inquestionavelmente modos de velamento da dimensão trágica da existência concreta, precisamente, aquela que se faz governar pela **lógica da diferença**. O fosso profundo entre a essência da **matemática** (ou do calculável) e a essência do **trágico** aqui aludida está presente em muitos pensadores, em especial, naqueles correntemente denominados **filósofos da vida**. Para exemplificarmos, ninguém melhor do que Pascal, pôr tê-lo tornado manifesto ainda nos alvores da modernidade, tanto pôr sua obra, quanto pôr seu próprio modo de vida.

3.3 Ou Jano ou Gêmeos

Apresentamos a seguir um quadro geral das noções até aqui tratadas bem como da delicada trama de suas interrelações. Nele buscamos explicitar o preciso momento de emergência da matematicidade da matemática, qual seja, aquele da passagem do neutro puro e simples (representação do Nada atuante) ao nada simetrizado ou espacializado, que nada mais é senão uma lembrança de um esquecimento, que na cultura atual (modernidade ou pós-modernidade, tanto faz), já nem mais se quer saber qual fora.



A linha horizontal representa o limiar a partir do qual pôde emergir a matemática. Abaixo, apenas o neutro ou o nulo não simetrizado e os semimonóides, cuja espécime príncipe são as **lógicas**. Acima, de um lado, o neutro de dupla face, à direita e à esquerda, como o rosto de Jano; de outro lado, o neutro duplicado, também um à direita e outro a esquerda, gêmeos, como Castor e Polux.

Sob o modo da dupla face se colocam o monóide, o conjunto formalizado, e mais acima, todo o edifício da matemática conjuntista; sob o modo da duplicação se posta a categoria, e acima, todo o edifício da matemática categorista. A linha pontilhada assinala o caráter mais fundamental da vertente categorista em relação à vertente conjuntista da matemática.

Devenos reiterar – e isto fica bastante evidente na figura acima – que, ao contrário dos monóides, os semimonóides não formam uma espécie particular de categoria. Eles, os semimonóides, e por conseqüência as lógicas, são entes pré-matemáticos, consideremos indiferentemente a matemática conjuntista ou a matemática categorista.

Ainda restaria para exame a conveniência ou não de se introduzir uma nova noção – a **semicategoria** – na qual estaria garantida a existência de homomorfismo à direita de todo morfismo, sempre que ele estivesse já garantido à esquerda, mas não o inverso. Qual a fecundidade desta idéia? As lógicas teriam justo aí o seu lugar? Em especial, como poderia tudo isto contribuir para a melhor compreensão das relações das lógicas com a matemática? São todas perguntas que deixamos em aberto pretendendo, entretanto, a elas voltar numa outra oportunidade.

4. Morte e Ressurreição

Ainda que recusando-nos a fazer coro com a sua metafísica subjetivista, devemos reconhecer em Bergson o mérito de ter-nos enfaticamente aclarado que a matemática e a física-matemática que lhe é associada, tinham como essência mais profunda a espacialização do tempo. Repetiu-o à exaustão:

> "Não percebiam que o tempo intelectualizado é espaço, que a inteligência trabalha com o fantasma da duração e não com a própria duração, que a eliminação do tempo é ato habitual, normal, banal, de entendimento, ..." (2)

Entretanto, enfatizava tal característica fundamental da ciência com o propósito maior de fixar a linha demarcatória entre esta última e a sua metafísica da duração; não para diminuir uma em relação a outra, mas para eqüivalorizá-las. Estava, talvez sem se dar conta, insistindo no mesmo projeto cartesiano fundador da modernidade.

Na mesma época em que Bergson assim especulava, surgiam as teorias einsteinianas que vinham dar acabamento funcional e estético ao projeto moderno de cálculo e conseqüente dominação do mundo. A **relatividade restrita** não só espacializava o tempo – o que já não seria novidade – mas vinha agora reduzí-lo a uma simples dimensão de uma geometria tetra-dimensional; a **relatividade geral** ia ainda mais longe ao geometrizar a própria materialidade – a distribuição da densidade de matéria passava a confundir-se com a curvatura local de uma potente, tanto quanto complacente, geometria diferencial. Nem Deus aí acharia tempo, ao menos, para um mero *coup des dés*. A geometrização do mundo, chegava assim ao seu ápice, e Einstein pode ser, com plena justiça, considerado o mais moderno dentre os modernos.

A matematização do mundo prenunciada pelos gregos – via aritmética pelos pitagóricos e via geométrica por Platão – e assumida como projeto pelo racionalismo moderno a partir de Descartes, tornava-se, desde então, em fato consumado. Entrementes, fato é também que é de sua essência mais profunda estar submetida à lógica clássica, do terço excluso ou da dupla diferença que, bem

sabemos, é a lógica mais funesta. É ainda um fato que ela acabou, mais tarde, encarnando, destarte, passando de cálculo a computação, e por este meio assola hoje o mundo, globalizando-o, como tão arrogantemente ilustram as atuais peças publicitárias da IBM. Malgrado, já se vão cerca de dois terços de século, que Heidegger (4) pôde vislumbrar, com toda nitidez, no que estávamos metidos:

> "O cálculo não admite outra coisa que o enumerável. Cada coisa é apenas aquilo que se pode enumerar. O que a cada momento é enumerado assegura o progresso na enumeração."

E que era da própria essência do cálculo o **consumir-se**; daí, estava-se apenas a um passo do consumismo devorador, a contar de si próprio:

> "Esta (a enumeração) utiliza progressivamente os números e é, em si mesma, um contínuo consumir-se. O resultado do cálculo com o ente vale como o enumerável e consome o enumerado para a enumeração. Este uso consumidor do ente revela o caráter destruidor do cálculo."

A tudo presidindo, lá estava a lógica, não a lógica em geral – apenas nisso equivocava-se Heidegger – mas uma lógica muito específica: a lógica clássica, a lógica mesma da morte:

> "O pensamento calculador submete-se a si mesmo à ordem de tudo dominar a partir da lógica (clássica) de seu procedimento (mortal). Ele não é capaz de suspeitar que todo calculável do cálculo já é (pela simetrização do neutro), antes de suas somas e produtos calculados, num todo cuja unidade, sem dúvida, pertence ao incalculável (o **real**, no jargão lacaniano) que se subtrai a si e sua estranheza das garras do cálculo." (parênteses interpolados pelo autor)

Tivéssemos nós um pouco mais de interesse e familiaridade com a história da cultura, saberíamos que era inexorável que um dia isto acontecesse, tanto quanto cremos seja inexorável, cedo ou tarde, que isto passe. E, então, que advirá?

Não temos dúvida que seja uma nova cultura, a cultura lógico qüinqüitária ou hiper-dialética, que não será de modo algum anti-matemática ou anti-científica – como ingenuamente crêem os "orientalistas", esotéricos e quejandas – mas que virá para subsumi-las, uma vez para sempre.

Enfim, a simetrização do Nada (seja de que modo for), a lógica clássica, a matemática, a cientificidade, a globalização pela computação preventiva ou repressiva é deveras um fato, e aos fatos só nos cabe contrapor a esperança que, em se tratando da lógica da morte, terá que ser, necessariamente, esperança na ressurreição do mundo.

BIBLIOGRAFIA

1. BELL, E.T. *Men of Mathematics.* N. York, Simon and Schuster, 1937.

2. BERGSON, Henri. *O pensamento e o movente (Introdução) em Os Pensadores* - V. XXXVIII. São Paulo, Abril, 1974.

3. BOURBAKI, Nicolas. *Eléments d'Histoire des Mathématiques.* Paris, Hermann, 1969.

4. FRAENKEL A.A., BAR-HILLEL, Y., LEVY A. *Foundations of Set Theory.* Amsterdam, North-Holland Pu., 1973.

5. HEIDEGGER, M. *Que é metafísica.* S. Paulo, L. Duas Cidades, 1969.

6. KLEIN, Felix. *Le programme d'Erlangen.* Paris, Gauthier-Villars, 1974.

7. MACLANE, Saunders. *Categories for the Working Matematician.* N. York, Springer-Verlag, 1971.

8. MACLANE, S., BIRKHOFF, G. *Algebra.* London, Macmillan, 1967.

9. SAMPAIO, L.S.C. de. *Noções elementares de lógica – V.* I e II. Rio de Janeiro, I. Cultura-Nova, 1988 (xerografado).

10. _____. *Lacan et les logiques.* Rio de Janeiro, 1992 (xerografado).

11. WALTERS, R.F.C. *Categories and Computer Science.* Cambridge, Cambridge U.P., 1991.